Funzioni differenziabili. Definizione ed esempi

Funzioni differenziabili - definizione

Definizione 1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che F è differenziabile nel punto $X_0 \in \Omega$ se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^d$ tale che*

$$F(X) = F(X_0) + v \cdot (X - X_0) + o(|X - X_0|),$$

ovvero se

$$\lim_{X \to X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - v \cdot (X - X_0)}{|X - X_0|} = 0.$$

Derivabilità e gradiente di una funzione differenziabile

Teorema 2 (Le funzioni differenziabili sono anche derivabili)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, ovvero tale che*

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + v \cdot (x - x_0, y - y_0) + o\Big(\big|(x - x_0, y - y_0)\big|\Big),$$

per un qualche vettore

$$v = (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora F è **derivabile** *in (x_0, y_0), ovvero esistono le* **derivate parziali**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + t, y_0) - F(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{s \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + s) - F(x_0, y_0)}{s}.$$

Inoltre,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = a \qquad e \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = b,$$

o in altri termini v è il gradiente di F in (x_0, y_0):

$$v = \nabla F(x_0, y_0).$$

Corollario 3. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $X_0 \in \Omega$. Allora, F è differenziabile in X_0 se e solo se*

$$\lim_{X \to X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)}{|X - X_0|} = 0. \tag{1}$$

Dimostrazione. Osserviamo che se vale (2), allora F è differenziabile per definizione. Viceversa, se F è differenziabile, allora esiste $v \in \mathbb{R}^d$ tale che

$$\lim_{X \to X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - v \cdot (X - X_0)}{|X - X_0|} = 0. \tag{2}$$

Ma allora per Teorema 2, abbiamo che $v = \nabla F(X_0)$. ☑

Differenziabilità e continuità

Teorema 4 (Differenziabile $\Rightarrow$ continua). *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Se F è differenziabile nel punto $X_0 \in \Omega$, allora F è continua in X_0.*

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo che

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\big|F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)\big|}{|X - X_0|} = 0. \tag{3}$$

Usando la disuguaglianza triangolare e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, abbiamo

$$\begin{aligned} |F(X) - F(X_0)| &\le |F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)| + |(X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)| \\ &\le |X - X_0| \frac{|F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)|}{|X - X_0|} + |(X - X_0)|\,|\nabla F(X_0)|. \end{aligned}$$

Di conseguenza, usando (3) ed il fatto che $\lim_{X \to X_0} |X - X_0| = 0$, otteniamo che

$$\lim_{X \to X_0} |F(X) - F(X_0)| = 0.$$

□

Esempio 5. *La funzione*

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

non è continua in zero e di conseguenza non è differenziabile in zero.

Somma e prodotto di funzioni differenziabili

Teorema 6 (Somma e prodotto di funzioni differenziabili). *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano $F : \Omega \to \mathbb{R}$ e $G : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili nel punto $X_0 \in \Omega$. Allora:*

(a) *la somma $F + G$ è differenziabile in X_0 e*

$$\nabla(F + G) = \nabla F + \nabla G.$$

(b) *il prodotto FG è differenziabile in X_0 e*

$$\nabla(FG) = G \nabla F + F \nabla G.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo:

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\big|F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)\big|}{|X - X_0|} = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\big|G(X) - G(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla G(X_0)\big|}{|X - X_0|} = 0. \tag{5}$$

Il punto (a) segue dalla disuguaglianza triangolare. Infatti,

$$\begin{aligned} &\lim_{X \to X_0} \frac{\big|(F + G)(X) - (F + G)(X_0) - (X - X_0) \cdot \big(\nabla F(X_0) + \nabla G(X_0)\big)\big|}{|X - X_0|} \\ &\quad \le \lim_{X \to X_0} \frac{\big|F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)\big|}{|X - X_0|} \\ &\qquad + \lim_{X \to X_0} \frac{\big|G(X) - G(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla G(X_0)\big|}{|X - X_0|} = 0. \end{aligned}$$

Per mostrare il punto (b), consideriamo il vettore

$$v = F(X_0)\nabla G(X_0) + G(X_0)\nabla F(X_0),$$

e scriviamo

$$\begin{aligned}
F(X)G(X)-&F(X_0)G(X_0) - (X - X_0)\cdot \Big(F(X_0)\nabla G(X_0) + G(X_0)\nabla F(X_0)\Big)\\
&= G(X)\Big(F(X) - F(X_0) - (X - X_0)\cdot \nabla F(X_0)\Big)\\
&\quad + (X - X_0)\cdot \nabla F(X_0)\Big(G(X) - G(X_0)\Big)\\
&\quad\quad + F(X_0)\Big(G(X) - G(X_0) - (X - X_0)\cdot \nabla G(X_0)\Big) =: (I) + (II) + (III).
\end{aligned}$$

Ora, siccome G è differenziabile in X_0, abbiamo che è anche continua in X_0 e quindi è localmente limitata, ovvero esistono $C > 0$ e $r > 0$ tali che

$$G(X) \le C \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r(X_0).$$

Di conseguenza, usando la locale limitatezza di G e (4), otteniamo che

$$\lim_{X\to X_0} \frac{G(X)\Big(F(X) - F(X_0) - (X - X_0)\cdot \nabla F(X_0)\Big)}{|X - X_0|} = 0.$$

Per calcolare il limite

$$\lim_{X\to X_0} \frac{\big|(II)\big|}{|X - X_0|},$$

usiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e la continuità di G:

$$\lim_{X\to X_0} \frac{\Big|(X - X_0)\cdot \nabla F(X_0)\Big(G(X) - G(X_0)\Big)\Big|}{|X - X_0|} \le \lim_{X\to X_0} |\nabla F(X_0)|\Big|G(X) - G(X_0)\Big| = 0.$$

Infine,

$$\lim_{X\to X_0} \frac{\big|(III)\big|}{|X - X_0|} = \lim_{X\to X_0} \frac{|F(X_0)|\Big|G(X) - G(X_0) - (X - X_0)\cdot \nabla G(X_0)\Big|}{|X - X_0|} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{X\to X_0} \frac{\big|F(X)G(X) - F(X_0)G(X_0) - (X - X_0)\cdot v\big|}{|X - X_0|}.$$

□

Corollario 7. *I polinomi sono funzioni differenziabili.*

Una funzione continua e derivabile ma non differenziabile

In uno dei capitoli precedenti abbiamo visto un esempio di una funzione derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ (zero compreso) ma con una discontinuità in zero. Il seguente è un esempio di una funzione continua e derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, ma non differenziabile in zero.

Esempio 8. *La funzione*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textit{se} \quad (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \textit{se} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è continua su $\mathbb{R}^2$*, derivabile in ogni punto, zero compreso, ma non è differenziabile in* $(0,0)$.

Derivabilità. *Fissato un* $x \in \mathbb{R}$ *diverso da zero, la funzione di una variabile* $y \mapsto F(x, y)$ *è derivabile in* y*. Analogamente, fissato un* $y \in \mathbb{R}$ *diverso da zero, la funzione di una variabile* $x \mapsto F(x, y)$ *è derivabile in* x*. Quindi basta verificare la derivabilità in* $(0, 0)$*. Siccome*

$$\begin{cases} F(x,0) = 0 & \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}, \\ F(0,y) = 0 & \textit{per ogni} \quad y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

otteniamo che esistono e sono nulle le derivate parziali

$$\partial_x F(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} = 0 \qquad e \qquad \partial_y F(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{F(0,k) - F(0,0)}{k} = 0.$$

Continuità. *La funzione* xy *che* $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *sono entrambe continue, quindi basta verificare che la funzione* F *sia continua in zero. In coordinate polari,* $x = \rho\cos\theta$ *e* $y = \rho\sin\theta$*, abbiamo che*

$$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\cos\theta\rho\sin\theta}{\rho} = \rho\cos\theta\sin\theta.$$

Siccome, $\sin\theta$ *e* $\cos\theta$ *sono funzioni limitate su* $[0, 2\pi]$*, abbiamo che*

$$\lim_{\rho\to 0} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - F(0,0)| \Big\} \le \lim_{\rho\to 0} \rho = 0.$$

Di conseguenza, F *è continua anche in* $(0, 0)$*.*

Differenziabilità. *Siccome abbiamo già dimostrato che la funzione* F *è derivabile in* $(0, 0)$*, abbiamo che:*

$$F \textit{ è differenziabile in } (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\big|F(x,y) - F(0,0) - (x,y)\cdot\nabla F(0,0)\big|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ora, siccome $F(0, 0) = 0$ *e* $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$*, abbiamo*

$$F \textit{ è differenziabile in } (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\big|F(x,y)\big|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Si tratta quindi di studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\big|F(x,y)\big|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

In coordinate polari abbiamo

$$\frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

Si ha quindi che

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{1}{2} \qquad e \qquad \inf_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = -\frac{1}{2}.$$

Di conseguenza

$$\limsup_{\rho\to 0} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \Big\} = \frac{1}{2} \qquad e \qquad \liminf_{\rho\to 0} \Big\{ \inf_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \Big\} = -\frac{1}{2},$$

e quindi il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

non esiste. Di conseguenza, F *non è differenziabile in zero.*

Esercizio 9. *Quali delle funzioni seguenti sono differenziabili in zero ?*

$$(1)\ xy + y^2\ ; \qquad (2)\ \sqrt{x^2+y^2}\ ; \qquad (3)\ \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; \qquad (4)\ \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$*.*

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, la funzione* $t \mapsto F(tx,ty)$ *è derivabile in zero.*

(f) F *è continua in zero.*

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$*.*

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata.*

Esercizio 12. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$*.*

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) *La funzione è differenziabile in zero.*

(e) *F è continua in zero.*

(f) *F è limitata.*

Esercizio 13. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*

(b) *$\nabla F(0,0) = (0,0)$.*

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *La funzione è differenziabile in zero.*

(e) *F è continua in zero.*

(f) *F è limitata.*

Esercizio 14. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*

(b) *$\nabla F(0,0) = (0,0)$.*

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *La funzione è differenziabile in zero.*

(e) *F è continua in zero.*

(f) *F è limitata.*

Esercizio 15. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - yx^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*

(b) *F è differenziabile in zero.*

(c) *F è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$*

(d) F *è di classe* C^2 *in* $\mathbb{R}^2$

(e) $\partial_{xy}F(0,0) = \partial_{yx}F(0,0)$.

Esercizio 16. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sqrt{|x|}}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata in* B_1.

La seguente proposizione sarà utile per gli esercizi successivi.

Proposizione 17. *Siano* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *e* $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

$$F(0) = G(0) \qquad e \qquad F(X) - G(X) = o(|X|)\,.$$

Allora, F *è differenziabile in zero se e solo se lo è* G.

Dimostrazione. Supponiamo che F sia differenziabile in zero, ovvero

$$\lim_{X\to 0} \frac{\big|F(X) - F(0) - X\cdot\nabla F(0)\big|}{|X|} = 0,$$

e che

$$F(0) = G(0) \qquad \text{e} \qquad \lim_{X\to 0}\frac{|F(X)-G(X)|}{|X|} = 0.$$

La differenziabilità di G, segue dalla disuguaglianza triangolare:

$$\lim_{X\to 0} \frac{\big|G(X) - G(0) - X\cdot\nabla F(0)\big|}{|X|}$$

$$\leq \lim_{X\to 0} \frac{\big|F(X) - F(0) - X\cdot\nabla F(0)\big|}{|X|} + \lim_{X\to 0}\frac{\big|G(X) - F(X)\big|}{|X|} = 0. \qquad \square$$

Esercizio 18. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin x}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata.*

Esercizio 19. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata.*

Esercizio 20. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) La funzione è differenziabile in zero.

(e) F *è continua in zero.*

(f) F *è limitata.*

Esercizio 21. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) F *è differenziabile in zero.*

(e) F *è continua in zero.*

Esercizio 22. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) F *è differenziabile in zero.*

(e) F *è continua in zero.*

Esercizio 23. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) Il gradiente in zero non è definito.

(d) F *è differenziabile in zero.*

(e) F *è continua in zero.*

Dagli appelli precedenti

Esercizio 24 (Gennaio 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$.*

(e) *F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

(f) *La funzione è differenziabile in zero.*

(g) *F è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*

(h) *F è continua in zero.*

(i) *quando $v = (1,1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0,0)$ esiste ed è uguale a zero.*

(j) *quando $v = (1,1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0,0)$ non esiste.*

(k) *quando $v = (1,1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0,0)$ esiste ma è diversa da zero.*

Esercizio 25 (Gennaio 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*

(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.

(c) *Il gradiente in zero non è definito.*

(d) *F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$.*

(e) *F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

(f) *La funzione è differenziabile in zero.*

(g) *F è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*

(h) *F è continua in zero.*

(i) *quando $v = (1,1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0,0)$ esiste ed è uguale a zero.*

(j) *quando $v = (1,1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0,0)$ non esiste.*

(k) *quando $v = (1,1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0,0)$ esiste ma è diversa da zero.*

Esercizio 26 (Febbraio 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere? Perché?

(1) *F è derivabile in zero;*

(2) $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *;*

(3) *Il gradiente in $(0,0)$ non è definito;*

(4) *F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$;*

(5) *F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;*

(6) *F è differenziabile in zero;*

(7) *F è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;*

(8) *F è continua in $(0,0)$;*

(9) *se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ed è uguale a zero;*

(10) *se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ non esiste;*

(11) *se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ma è diversa da zero.*

Esercizio 27 (Febbraio 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere? Perché?

(1) *F è derivabile in zero;*

(2) $\nabla F(0,0) = (0,0)$*;*

(3) *Il gradiente in $(0,0)$ non è definito;*

(4) *F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$;*

(5) *F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;*

(6) *F è differenziabile in zero;*

(7) *F è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;*

(8) *F è continua in $(0,0)$:*

(9) *se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ed è uguale a zero;*

(10) *se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ non esiste;*

(11) *se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ma è diversa da zero.*

Esercizio 28 (Aprile 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2 \sin(2y)}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere? Perché?

(1) *F è derivabile in zero;*

(2) *$\nabla F(0,0) = (0,0)$;*

(3) *F è derivabile su $\mathbb{R}^2$;*

(4) *F è derivabile su $\mathbb{R}^2$ e le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$;*

(5) *F è derivabile su $\mathbb{R}^2$, ma le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ non sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$;*

(6) *F è differenziabile in zero;*

(7) *F è continua su $\mathbb{R}^2$;*

(8) *F è continua in tutti punti di $\mathbb{R}^2$ tranne l'origine $(0,0)$;*

(9) *se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ed è uguale a zero;*

(10) *se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ non esiste;*

(11) *se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ma è diversa da zero.*

Esercizio 29 (Aprile 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy \cos(x)}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere? Perché?

(1) *F è derivabile in zero;*

(2) *$\nabla F(0,0) = (0,0)$;*

(3) *F è derivabile su $\mathbb{R}^2$;*

(4) *F è derivabile su $\mathbb{R}^2$ e le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$;*

(5) *F è derivabile su $\mathbb{R}^2$, ma le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ non sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$;*

(6) *F è differenziabile in zero;*

(7) *F è continua su $\mathbb{R}^2$;*

(8) *F è continua in tutti punti di $\mathbb{R}^2$ tranne l'origine $(0,0)$;*

(9) *se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ed è uguale a zero;*

(10) *se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ non esiste;*

(11) *se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ma è diversa da zero.*

Esercizio 30 (Giugno 2021). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+5y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *Calcolare le derivate parziali* $\partial_x F(0,0)$ *e* $\partial_y F(0,0)$.

(b) *È vero che la funzione è differenziabile in* $(0,0)$*? Perché?*

Esercizio 31 (Giugno 2021). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+5y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *Calcolare le derivate parziali* $\partial_x F(0,0)$ *e* $\partial_y F(0,0)$.

(b) *È vero che la funzione è differenziabile in* $(0,0)$*? Perché?*

Esercizio 32 (Luglio 2021). *Trovare una funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che:*

- F *è differenziabile in ogni punto* $(x,y) \neq (0,0)$;
- F *è continua in* $(0,0)$;
- F *è derivabile in* $(0,0)$;
- F *non è differenziabile in zero.*

Spiegare perché la funzione trovata ha queste proprietà.

Esercizio 33 (Settembre 2021). *Trovare una funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che:*

- F *è continua e derivabile in* $(0,0)$;
- F *non è differenziabile in zero.*

Spiegare perché la funzione trovata ha queste proprietà.